View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Kazan Federal University Digital Repository

где $x_0 \in X$ — некоторый фиксированный элемент. Необходимость таких условий для компактности множеств в пространствах суммируемых функций впервые отметил Я.Д. Тамаркин [4].

Для степенной функции $\varphi(t) = t^p$ при $p > 0$ эти результаты были получены в [2]. Мы используем методы этой работы.

Литература

1. Ульянов П. Л. *Представление функций рядами и классы* $\varphi(L)$ // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27. – № 2. – С. 1–54.

2. Calderon A. P. *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions* // Studia Math. – 1972. – V. 44. – № 3. – С. 561–582.

3. Коляда В. И. *Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью* // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 293. – № 4. – С. 534–537.

4. Tamarkin J. D. *On the compactness of the space* L_p // Bull. Amer. Math. Soc. – 1932. – Т. 38. – № 2. – С. 79–84.

5. Кротов В. Г. *Критерии компактности в пространствах* L^p, $p \geq 0$ // Матем. сб. –2012. – Т. 203. – № 7. – С. 129–148.

ON COMPACTNESS CONDITIONS IN THE SPACES $\varphi(L)$

I.N. Katkovskaya, V.G. Krotov

In this paper, we give criteria for the compactness of sets in the spaces $\varphi(L)$ consisting of equivalence classes of measurable functions f for which the composite $\varphi \circ f$ is summable on a metric space X with a measure that satisfies the doubling condition. Here $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an even function, positive, continuous and increasing on $(0, +\infty)$, and $\varphi(+0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. In addition, it is assumed that φ satisfies the Orlicz Δ_2-condition. The compactness criteria are formulated in terms of maximal operators measuring the local smoothness.

Keywords: doubling condition, compactness, spaces of summable functions, maximal operators, local smoothness.

УДК 517.5

ПРОБЛЕМА О СКАЧКЕ НА ДУГЕ ДЛЯ β-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б.А. Кац[1], С.Р. Миронова[2], А.Ю. Погодина[3]

1 *katsboris877@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *srmironova@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ
3 *apogodina@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Мы рассматриваем краевую задачу о скачке на жордановой дуге и ищем решение в классе функций, являющихся β-аналитическими функциями.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, краевая задача о скачке, β-аналитические функции.

Рассмотрим уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1,$$

где

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Оно является обобщением уравнения Коши-Римана $\overline{\partial}\phi = 0$ и имеет большое количество применений, см. напр., [1–3]. В 1985 г. А.Б. Тунгатаров [4] исследовал это уравнение при $\mu(z) = \beta(z/\overline{z})$, $0 \le \beta < 1$, и установил следующий аналог формулы Коши для решений этого уравнения:

$$\phi(z) = \frac{1}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z|z/\zeta|^\theta} + \frac{\beta}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta\phi(\zeta)d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(\zeta - z|z/\zeta|^\theta)},$$

где $\theta = 2\beta/(1-\beta)$, Γ — замкнутая гладкая кривая, ограничивающая некоторую плоскую область.

Затем в статьях [5–9] были изучены краевые задачи для непрерывно дифференцируемых решений этого уравнения, называемые β-аналитическими функциями; были решены задача о скачке и задача Римана на замкнутых кривых.

Здесь мы исследуем задачу о скачке для β-аналитических функций на жордановых дугах.

Пусть Γ – ориентированная гладкая дуга, начинающаяся в точке t_1 и заканчивающаяся в точке t_2, $\Gamma' = \Gamma \setminus \{t_1, t_2\}$ и $0 \notin \Gamma$. Мы ищем β-аналитическую функцию $\Phi(z)$ такую, что в каждой точке $t \in \Gamma'$ она обладает предельными значениями слева и справа, удовлетворяющие соотношению

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma', \tag{1}$$

с заданной функцией $f(t)$. Кроме того, требуется, чтобы $\Phi(\infty) = 0$ и в концевых точках дуги имеют место соотношения

$$\Phi(z) = O(|z - t_j|^{-\alpha_j}), \quad z \to t_j, \quad \alpha_j = \alpha_j(\Phi) < 1, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Для случая $\beta = 0$ задача о скачке на гладких дугах изучена, и ее решение хорошо известно, см., напр., [10, 11]. Основным аппаратом здесь является интеграл типа Коши. В настоящей работе мы применяем его аналог

$$\Phi(z) = C_\Gamma^\beta(f; z) := \frac{1}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z|z/\zeta|^\theta}(d\zeta + \beta(\zeta/\overline{\zeta})d\overline{\zeta}). \tag{3}$$

Такой интеграл, взятый по замкнутой кривой, исследовался в [5–7]. Отметим некоторые свойства интеграла в (3).

Лемма 1. *Если интеграл в* (3) *существует, то правая часть этого равенства определяет β-аналитическую функцию в $\mathbb{C}\setminus\gamma$, обращающуюся в нуль на бесконечности.*

Обозначим через $H_\nu(\Gamma)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν, $\nu \in (0; 1]$.

Лемма 2. *Если функция* $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$*, то функция* Φ*, определенная равенством* (3)*, имеет предельные значения слева и справа* $\Phi^{\pm}(t)$ *в любой точке* $t \in \Gamma'$*, удовлетворяющие равенству* (1).

Заметим, что отображение $z \mapsto z|z|^\theta$ является взаимно однозначным. Оно билипшицево на каждом компактном подмножестве плоскости. не содержащем начало координат. обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ образ дуги Γ при этом отображении.

Лемма 3. *Если функция* $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$*, то в окрестности концевых точек дуги* Γ *функция* Φ*, определенная в* (3)*, имеет следующее поведение:*

$$\Phi(z) = \frac{f(t_j)}{2(1-\beta)\pi i} \ln \frac{\widetilde{z} - \widetilde{t}_2}{\widetilde{z} - \widetilde{t}_1} + c_j + o(1), \quad j = 1, 2,$$

где c_j *– константы, а ветвь логарифма определяется разрезом вдоль* $\widetilde{\Gamma}$.

На основании лемм 1–3 доказывается

Теорема. *Функция* $\Phi(z) = C_\Gamma^\beta(f; z)$ *является единственным решением задачи о скачке* (1)–(2) *на гладкой дуге* Γ*, удовлетворяющим уравнению Бельтрами* $\overline{\partial}\phi = \beta(z/\overline{z})\partial\phi$ *и обращающимся в нуль на бесконечности.*

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ No 17-41-160345.

Литература

1. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции.* – Москва: Наука, 1988.

2. Bojarski B. *Old and new on Beltrami equations* // Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations. Proc. of the ICTP Conference. – Trieste, Italy, Feb., 8–19, 1988.

3. Iwaniec T., Martin G. *What's new for the Beltrami equation?* // Proc. of the National Research Symposium on Geometric Analysis and Appls. June, 26-30, 2000. – Canberra, Proc. Centre Math. Appl. 2000. – V. 39. – P. 132–148.

4. Tungatarov A. B. Properties of certain integral operator in classes of summable functions // Izv. AN Kazakh. SSR, Ser. Fiz.-Mat. – 1985. – V. 132, No 5. – P. 58–62.

5. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D. *On the jump problem for* β*-analytic functions* // Complex Var. Elliptic Equat. – 2006. – V. 51. – P. 763–775.

6. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. *A property of the* β*-Cauchy type integral with continuous density* // Ukr. Math. J. – 2008. – V. 60. – P. 1683–1690.

7. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D., Vilaire J.-M. *Riemann boundary value problem for analytic functions* // Int. J. Pure Appl.Math. – 2008. – V. 42. – P. 19-37.

8. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Vilaire J.-M. *A jump problem for* β*-analytic functions in domains with fractal boundaries* // Rev. Mat. Comput. – 2010. – V. 23. – P. 105-111.

9. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Vilaire J.-M. *The Riemann boundary value problem for* β*-analytic functions over* D*-summable closed curves* // Int. J. Pure Appl. Math. – 2012. – V. 75. – P. 441-453.

10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи, 3-е изд.* – Москва: Наука, 1977.

11. Jian-Ke Lu *Boundary Value Problems for Analytic Functions.* – Singapore: World Scientific, 1993.

JUMP PROBLEM ON AN ARC FOR β-ANALYTIC FUNCTIONS

B.A. Kats, S.R. Mironova, A.Yu. Pogodina

We consider the jump boundary problem on a Jordan arc for β-analytic functions.

Keywords: Beltrami equation, jump problem, β-analytic functions.

УДК 517.544

ПОКАЗАТЕЛИ МАРЦИНКЕВИЧА И ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ β-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д.Б. Кац[1]

1 *katzdavid89@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе мы изучаем задачу о скачке и некоторые решения уравнения Бельтрами. Как задача о скачке, так и уравнения Бельтрами имеют многочисленные приложения в физике и механике. Они изученые для случаев аналитических (т.е. 0*-аналитических) функций и спрямляемых контуров. Мы обсуждаем эти вопросы для случаев β-аналитических функций и неспрямляемых кривых. Расширяя известную технику решения данных задач на такие случаи, мы получаем неизвестные ранее результаты.*

Ключевые слова: фракталы, фрактал, показатели Марцинкевича, метрические характеристики, неспрямляемые кривые.

Одним из крайне востребованных в механике и физике обобщений уравнений Коши–Римана (см., напр., [1]) является уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1$$

Здесь, как обычно,

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

В случае

$$\mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \le \beta < 1$$

правый обратный оператор для дифференциального оператора Бельтрами $\overline{\partial} - \mu\partial$ (аналог известного оператора T из [1]) был в явном виде найден казахским математиком А. Тунгатаровым [3]. Решения соответствующего уравнения Бельтрами получили название β−аналитических функций.

В наши дни исследования аналогов краевой задачи Римана и связанных с ними вопросов для таких функций получили дальнейшее развитие в работах таких математиков, как Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье (см. [4], [6]).

Для аналитических (т. е. 0-аналитических) функций краевая задача Римана хорошо изучена в следующей постановке: Пусть Г есть ориентированная кривая на